

5 Basen

5.1 Der Basisbegriff

Definition Eine *Basis* für einen Vektorraum ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beispiel Sei V der Vektorraum k^n für einen beliebigen Körper k . Für $1 \leq i \leq n$ definieren wir $e_i \in k^n$ als der Vektor $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ dessen i ten Komponente 1 ist und alle weitere Komponenten Null sind. Die Vektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ bilden dann eine Basis für k^n , die sogenannte *Standardbasis*.

Erzeugendensystem: Es ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, und jedes $v \in k^n$ hat diese Form.

Linear unabhängig: ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$, so zeigt ein Koeffizientenvergleich, dass $\lambda_i = 0$ für alle i .

Lemma 5.1. Sei $v_1, \dots, v_n$ ein System von Vektoren im k -Vektorraum V . Dann

- a) $v_1, \dots, v_n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes $v \in V$ höchstens eine Darstellung als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ hat.
- b) $v_1, \dots, v_n$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von V , wenn jedes $v \in V$ mindestens eine Darstellung als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ hat.
- c) $v_1, \dots, v_n$ ist genau dann eine Basis von V , wenn jedes $v \in V$ genau eine Darstellung als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ hat.

Beweis. a): Ist das System linear abhängig, dann hat $\underline{0}$ die triviale und eine nichttriviale Darstellung. Ist $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ und gibt es ein j mit $\lambda_j \neq \mu_j$, dann ist $\underline{0} = v - v = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i) v_i$, eine nichttriviale Darstellung wegen $\mu_j - \lambda_j \neq 0$.

b): Definition Erzeugendensystem. c): Folgt aus a), b) nach Definition Basis. ■

Bemerkung Will man zeigen, dass $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis des Untervektorraums $U \subseteq V$ sind, so muss man drei Bedingungen prüfen:

- a) $v_i \in U$ für alle i ;
- b) Jedes $u \in U$ ist eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$;
- c) Das System $v_1, \dots, v_n$ ist linear unabhängig.

Beispiel Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ der Lösungsraum der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Eine Basis für V ist $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$. Man sieht, dass v_1, v_2 beide in V liegen. Ist $(x, y, z) \in V$, dann $x = -y - z$, weshalb $(x, y, z) = yv_1 + zv_2$. Jedes Element von U liegt also in $\langle v_1, v_2 \rangle$. Schließlich zeigt ein Komponentenvergleich, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.

Eine weitere Basis für V besteht aus $w_1 = (1, 0, -1)$ und $w_2 = (0, 1, -1)$.

Beispiel Sei V der Raum aller Polynome vom Grad ≤ 3 , die eine Nullstelle in $x = -1$ haben. Drei solche Polynome sind $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x$ und $p_3(x) = x^3 + x^2$. Diese drei Polynome sind auch linear unabhängig: ist $\lambda p_1(x) + \mu p_2(x) + \nu p_3(x) = 0$ für alle x , dann $\lambda = 0$ ($x = 0$ einsetzen), also $\mu p_2(x) + \nu p_3(x) = 0$. Leiten wir diese Gleichung einmal ab und setzen wir dann $x = 0$ ein, erhalten wir $\mu = 0$, denn $p_2'(x) = 2x + 1$, $p_3'(x) = 3x^2 + 2x$. Also $\nu p_3(x) = 0$. Setzen wir $x = 1$ ein so erhalten wir $2\nu = 0$, weshalb $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Diese drei Polynome erzeugen auch V , denn: ist $q(x) \in V$, so ist $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $d = c - b + a$. Also $q(x) = ap_3(x) + (b - a)p_2(x) + (c - b + a)p_1(x)$. Damit ist p_1, p_2, p_3 eine Basis für V .

Beispiel Die Menge $\{0\}$ ist ein Vektorraum, denn sie erfüllt alle Axiome. Auch dieser Vektorraum hat eine Basis: das leere System, das aus *keinen* Vektoren besteht. Es wird vereinbart, dass die Summe von keinen Vektoren der Nullvektor ist⁶, daher ist das leere System ein Erzeugendensystem. Und das leere System ist linear unabhängig, denn es gibt keine Skalare λ_i , die $\neq 0$ sein könnten.

5.2 Sätze über Basen

Über Basen sind viele allgemeine Aussagen möglich.

- Existenz: Jeder Vektorraum hat eine Basis.
- Basisergänzungssatz: Jedes linear unabhängige System lässt sich zu einer Basis fortsetzen.
- Steinitzscher Austauschsatz: Hat zur Folge, dass alle Basen gleich lang sind.
- Charakterisierung von Basen: die Begriffe „Basis“, „maximales linear unabhängiges System“ und „minimales Erzeugendensystem“ sind gleichbedeutend.

Wir beschränken uns hier auf endlich erzeugten Vektorräume: wegen des robusten Dimensionsbegriffs ist dieser Fall besonders wichtig.

Lemma 5.2. *Sei V ein k -Vektorraum, und $n \geq 1$. Für ein System $v_1, \dots, v_n$ von Vektoren aus V sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

- Es gibt eine lineare Abhängigkeit $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \underline{0}$ mit $\lambda_n \neq 0$;*
- v_n ist eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_{n-1}$;*
- Es ist $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$.*

⁶Es ist ja $\sum_{i=1}^n v_i = v_n + \sum_{i=1}^{n-1} v_i$. Dies bleibt auch für $n = 1$ wahr, wenn man $\sum_{i=1}^0 v_i$ als $\underline{0}$ deutet.

Zusatz: Sind $v_1, \dots, v_{n-1}$ linear unabhängig, so kann man a) ersetzen durch

a') Das System $v_1, \dots, v_n$ ist linear abhängig.

Beweis. c) $\Rightarrow$ b): Definition von „Linearkombination“.

b) $\Rightarrow$ a): Ist $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$, dann mit $\lambda_n = -1$ gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \underline{0}$.

a) $\Rightarrow$ c): Mit $\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_n}$ ist $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i v_i$. Nun sei $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, also gibt es ν_i mit $v = \sum_{i=1}^n \nu_i v_i$, weshalb $v = \sum_{i=1}^{n-1} (\nu_i + \mu_i \nu_n) v_i$.

Zusatz: Ist $\lambda_n = 0$, dann sind $v_1, \dots, v_{n-1}$ linear abhängig. ■

Auswahlsatz Sei V ein k -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V . Dann gilt: Indem man geeignete Vektoren v_i streicht, erhält man eine Basis von V .

Zusatz: Sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig, so kann man sie bei den Streichungen schonen.

Beweis. Induktion über n . Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 0$. Hier gilt die Behauptung, denn ein System von keinen Vektoren gilt als linear unabhängig. Nun sei $n \geq 1$. Ist $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, so liegt eine Basis vor, und wir sind fertig. Ist das System linear abhängig, so sei m die kleinste Zahl derart, dass $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig sind. Dann sind $v_1, \dots, v_{m-1}$ linear unabhängig, also nach Lemma 5.2 (Zusatz) ist v_m eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_{m-1}$, und daher von $v_1, \dots, \widehat{v_m}, \dots, v_n$, wo das Hut „weglassen“ bedeutet. Daher (Lemma 5.2 wieder) ist $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, \widehat{v_m}, \dots, v_n \rangle$. Also ist $v_1, \dots, \widehat{v_m}, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem. Zusatz: sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig, dann muss $m > r$ sein. ■

Existenzsatz Jeder endlich-dimensionaler Vektorraum hat mindestens eine Basis.

Beweis. Da der Vektorraum endlich-dimensional ist, gibt es ein Erzeugendensystem $v_1, \dots, v_n$. Jetzt den Auswahlsatz anwenden. ■

Beispiel Finde eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die aus einigen der Vektoren $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, -2)$, $v_4 = (0, 1, -1)$ und $v_5 = (3, -1, 4)$ besteht.

Wir verwendeten den Ansatz des Auswahlsatzes – auch wenn es mit anderen Methoden schneller geht. Zuerst zeigten wir, dass diese 5 Vektoren tatsächlich erzeugen. Dann benutzten wir die lineare Abhängigkeiten $v_1 - v_2 - v_3 = \underline{0}$ und $3v_2 + 3v_3 - 7v_4 - v_5 = \underline{0}$, um v_1, v_5 zu streichen. Dann zeigten wir: v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig, also bilden sie eine Basis.

Basisergänzungssatz Sei V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum. Jedes linear unabhängige System $v_1, \dots, v_r$ lässt sich zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ für V fortsetzen.

Beweis. Sei $w_1, \dots, w_m$ ein Erzeugendensystem für V . Dann ist auch $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_m$ ein Erzeugendensystem. Nach dem Zusatz zum Auswahlssatz dürfen wir dieses lange Erzeugendensystem zu einer Basis zusammenstreichen, wobei wir ausschließlich Vektoren der Art w_j streichen. ■

Beispiel Wir benutzten die Standardbasis e_1, e_2, e_3 , um $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 3, 17)$ zur Basis v_1, v_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ fortzusetzen.

Satz: Charakterisierung von Basen Für ein System $v_1, \dots, v_n$ im k -Vektorraum V sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- a) $v_1, \dots, v_n$ ist eine Basis für V , d.h. ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
- b) $v_1, \dots, v_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem für V .
Minimal bedeutet hier: Egal, welches v_i man streicht – danach liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.
- c) $v_1, \dots, v_n$ ist ein maximales linear unabhängiges System in V .
Maximal bedeutet: egal, wie man $v_{n+1} \in V$ wählt – das System $v_1, \dots, v_{n+1}$ ist linear abhängig.

Beweis. Minimales Erzeugendensystem $\Rightarrow$ Basis: Folgt aus dem Auswahlssatz, da keine Streichungen möglich.

Basis $\Rightarrow$ minimales Erzeugendensystem: Wäre auch $v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem, dann wäre $v_i \in \langle v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$. Nach Lemma 5.2 wäre also $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig.

Basis $\Rightarrow$ maximal linear unabhängig: Ist $v \in V$ dann $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, also $v_1, \dots, v_n, v$ linear abhängig nach Lemma 5.2.

Maximal linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis: Sei $v \in V$. Wegen Maximalität ist das System $v_1, \dots, v_n, v$ linear abhängig. Nach Lemma 5.2 (Zusatz) ist dann v eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. ■

5.3 Unendliche Systeme

Wir sahen, dass der Vektorraum aller Polynome nicht endlich-dimensional ist. Um hier einen Basisbegriff zu entwickeln, müssen wir festlegen, was der Begriff „Linearkombination“ für ein unendliches System bedeuten soll.

Wie es nicht geht

Erster Definitionsversuch Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie⁷ von Vektoren aus einem k -Vektorraum V , wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

Der Vektor $w \in V$ heißt *Linearkombination* des beliebig großen Systems $(v_i)_{i \in I}$, falls es eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Skalaren $\lambda_i \in k$ gibt mit $w = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$.

⁷D.h. eine Abbildung $I \rightarrow V, i \mapsto v_i$.

Probleme mit diesem Definitionsversuch Bei unendlichen Summen stellt sich die Frage, ob die Summe überhaupt einen Wert hat.

- a) Im Fall $k = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}$ geht es um Konvergenz. Die Exponentialfunktion $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ konvergiert überall⁸, daher könnte man sagen: Im Sinne des obigen Definitionsversuchs ist die Exponentialfunktion e^X eine Linearkombination der Potenzfunktionen $1, X, X^2, X^3, \dots$. Bei $f(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (nX)^n$ dagegen ist Konvergenz nur für $X = 0$ gegeben, eine solche unendliche Summe bricht also aus dem Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus.
- b) Schlimmer noch: Für beliebige Körper – etwa $k = \mathbb{F}_2$ – gibt es gar keinen Konvergenzbegriff.

Was man stattdessen macht

Definition Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Vektoren aus dem k -Vektorraum V , wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Der Vektor $w \in V$ heißt *Linearkombination* des Systems $(v_i)_{i \in I}$, falls es eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Skalaren $\lambda_i \in k$ gibt, mit

- a) Die Menge $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ ist endlich; und
- b) Es ist $w = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, was jetzt eigentlich eine endliche Summe ist, und daher problemlos existent.

Beispiel Also ist $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ doch keine Linearkombination der Potenzfunktionen X^n .

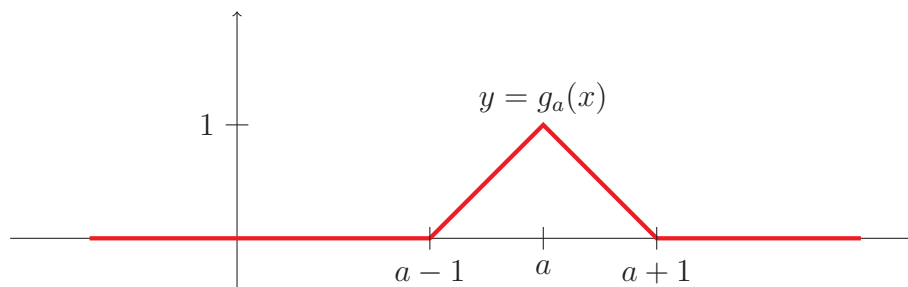
Definition Jetzt kann man auch die Definitionen, die auf Linearkombinationen aufbauen, auf unendlichen Systemen erweitern. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Vektoren aus einem k -Vektorraum V .

- Das System $(v_i)_{i \in I}$ heißt *linear unabhängig*, wenn der Nullvektor nur die triviale Darstellung als Linearkombination von $(v_i)_{i \in I}$ hat.
- Erzeugnis $\langle v_i \mid i \in I \rangle := \{w \in V \mid w \text{ ist Linearkombination von } (v_i)_{i \in I}\}$.
- $(v_i)_{i \in I}$ heißt ein *Erzeugendensystem* von V , wenn $\langle v_i \mid i \in I \rangle = V$ ist.
- Eine *Basis* von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V .

Beispiel Die Potenzfunktionen $(X^n)_{n \geq 0}$ bilden eine Basis des reellen Vektorraums P aller reellwertigen Polynome.

⁸Vgl. den Begriff „Konvergenzradius“ aus der Analysis.

Beispiel Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende stetige Funktion: es ist $g_a(x) = 0$ für $x \leq a - 1$ und für $x \geq a + 1$; $g_a(a) = 1$; und g_a ist linear auf den Intervallen $[a - 1, a]$ und $[a, a + 1]$.



Wir werden zeigen, dass dieses System linear unabhängig ist, und dass die Funktion $f(x) = x^2$ keine Linearkombination der g_a ist.

Ist $g_{a_1}, g_{a_2}, \dots, g_{a_n}$ ein endliches Untersystem, so dürfen wir problemlos die a_i in aufsteigender Reihenfolge wählen. Es ist also $a_n > a_i$ für alle $i \leq n - 1$. Für $\varepsilon > 0$ klein genug ist dann $a_n + 1 - \varepsilon > a_i + 1$ für alle $i \leq n - 1$, weshalb $g_{a_n}(a_n + 1 - \varepsilon) > 0$ und $g_{a_i}(a_n + 1 - \varepsilon) = 0$ für alle $i \leq n - 1$. Ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_{a_i}(x) = 0$ für alle x , dann folgt $\lambda_n = 0$ durch Einsetzen $x = a_n + 1 - \varepsilon$. Per Induktion über n folgt dann: es ist $\lambda_i = 0$ für alle i , d.h. $g_{a_1}, \dots, g_{a_n}$ sind linear unabhängig, also ist das ganze System $(g_a)_{a \in \mathbb{R}}$ linear unabhängig.

Wäre

$$x^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_{a_i}(x) \quad (*)$$

für alle x , so setzen wir $x = x_0$ ein für ein x_0 mit $x_0 \geq 1$ und $x_0 \geq a_i + 1$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wegen $x_0 \geq a_i + 1$ ist $g_{a_i}(x) = 0$ für alle i , weshalb die rechte Seite von $(*)$ den Wert 0 annimmt. Wegen $x_0 \geq 1$ ist $x_0^2 \geq 1$, ein Widerspruch. Somit ist $f(x) = x^2$ keine Linearkombination der Funktionen $g_a(x)$.

6 Dimension

6.1 Der Steinitzsche Austauschsatz

Bemerkung Trotz seiner Benennung war dieser Satz bereits Graßmann bekannt. Man witzelt, dass mathematische Sätze häufig nach der *letzten* Person benannt sind, die sie entdeckt. Die Leistung des E. Steinitz war es, ein analoges Ergebnis in der Körpertheorie zu beweisen, das einen Dimensionsbegriff in der Algebraischen Geometrie ermöglicht.

Austauschlemma Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des k -Vektorraums V , und $w \in V$ ein Vektor $\neq \underline{0}$. Dann gibt es eindeutige Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ derart, dass $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ ist⁹, und für mindestens ein i muss $\lambda_i \neq 0$ gelten¹⁰.

Für jedes $1 \leq i \leq n$ mit $\lambda_i \neq 0$ gilt dann: Ersetzt man v_i durch w , so liegt weiterhin eine Basis von V vor.

Beispiel $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3 ; $w = (3, 0, -\frac{1}{2}) = 3e_1 + 0e_2 - \frac{1}{2}e_3$. Hier sind $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$. Tatsächlich sind dann w, e_2, e_3 und e_1, e_2, w Basen, ferner ist e_1, w, e_3 keine Basis.

Beweis. Lemma 5.2: Wegen der linearen Abhängigkeit $w - \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \underline{0}$ mit $\lambda_i \neq 0$ gilt $\langle w, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle = \langle w, v_1, \dots, v_n \rangle = V$. Dies ist also ein Erzeugendensystem.

Es bleibt zu zeigen: $w, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n$ ist linear unabhängig. Angenommen also $\mu w + \sum_{j \neq i} \nu_j v_j = \underline{0}$. Da die v_j linear unabhängig sind, gilt $\mu \neq 0$. Wir substituieren den Wert von w :

$$\mu \lambda_i v_i + \sum_{j \neq i} (\nu_j + \mu \lambda_j) v_j = \underline{0}.$$

Also $\mu \lambda_i = 0$. Aber $\mu \neq 0$ und $\lambda_i \neq 0$. Widerspruch. ■

Steinitzscher Austauschsatz (Graßmann) Sei $a_1, a_2, \dots, a_m$ ein lineare unabhängiges System im k -Vektorraum V , und $b_1, b_2, \dots, b_n$ eine Basis. Dann ist $m \leq n$; und es gibt eine zweite Basis der Länge n , die aus allen Vektoren a_i sowie $n - m$ Stück der Vektoren b_j besteht.

Beweis. Induktion über m . Für $m = 0$ gibt es nichts zu zeigen, und das Austauschlemma erledigt den Fall $m = 1$.

Induktionsssschritt: Sei also $m \geq 2$. Wir nehmen an, dass das Ergebnis stimmt für $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$. Folglich ist $m - 1 \leq n$, und V hat eine Basis der Art

⁹Grund: $v_1, \dots, v_n$ ist eine Basis von V .

¹⁰Den sonst wäre $w = \underline{0}$.

$a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, c_m, \dots, c_n$, mit $\{c_m, \dots, c_n\} \subseteq \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann gibt es $\lambda_i, \mu_j \in k$ mit

$$a_m = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + \sum_{j=m}^n \mu_j b_j.$$

Da das System $a_1, \dots, a_m$ linear unabhängig ist, muss es ein j geben mit $\mu_j \neq 0$. Also $n \geq m$, und nach dem Austauschlemma ist $a_1, \dots, a_m, c_m, \dots, \hat{c}_j, \dots, c_n$ eine Basis von V . ■

Beispiel Wir benutzen die Standardbasis e_1, e_2, e_3 , um $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 3, 17)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ fortzusetzen, aber diesmal mit dem Austauschsatz. Es ist $v_1 = e_1 + e_3$, daher ist v_1, e_2, e_3 eine Basis. Es ist $v_2 = 3e_2 + 17e_3$, daher ist v_1, v_2, e_3 eine Basis.

Korollar 6.1. *Im k -Vektorraum V sei $a_1, a_2, \dots, a_m$ ein lineares unabhängiges System und $b_1, b_2, \dots, b_n$ ein Erzeugendensystem. Dann ist $m \leq n$.*

Beweis. Mit dem Auswahlssatz streichen wir die b_j zu einer Basis zusammen. Dann wenden wir den Austauschsatz an. ■

Beispiel Der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ ist nicht endlich dimensional, denn für jedes n ist $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$ ein linear unabhängiges System der Länge n .

6.2 Der Dimensionsbegriff

Satz 6.2 (Alle Basen gleich lang). *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann: V hat Basen, und alle Basen von V sind gleich lang.*

Beweis. Nach dem Existenzsatz hat V mindestens eine Basis. Aus dem Austauschsatz folgt: liegen zwei Basen vor, so ist jede höchstens so lang wie die andere. Das heißt, sie sind gleich lang. ■

Definition Sei V ein endlich erzeugter k -Vektorraum. Die gemeinsame Länge aller Basen heißt die *Dimension* $\dim(V)$ von V . Ist $\dim(V) = n$, so sagt man: V ist n -dimensional.

Korollar 6.3. *Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum, und sei $a_1, \dots, a_n$ ein System von n Vektoren aus V .*

- a) *Sind $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig, dann bilden sie eine Basis von V .*
- b) *Ist $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem von V , dann bilden diese Vektoren eine Basis von V .*

Beweis. a): Basisergänzungssatz: man kann zu einer Basis $a_1, \dots, a_N$ fortsetzen, mit $N \geq n$. Nach Satz 6.2 ist $N = \dim(V) = n$. Also ist $a_1, \dots, a_n$ eine Basis.

b): Auswahlssatz: Es gibt eine Basis von V , die aus $r \leq n$ der Vektoren a_i besteht.
 Satz 6.2: es ist $r = \dim(V) = n$, also ist diese Basis $a_1, \dots, a_n$. ■

Satz 6.4 (Effektivität der Dimension). *Sei V ein endlich dimensionaler k -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist U selbst endlich dimensional, und es gilt: $\dim(U) \leq \dim(V)$; und*

$$\dim(U) = \dim(V) \iff U = V.$$

Beweis. Setze $n = \dim(V)$. Nach dem Austauschsatz hat jedes linear unabhängige System in U Länge $\leq n$. Also existiert

$$d := \max\{r \geq 0 \mid \text{es gibt } u_1, \dots, u_r \text{ linear unabhängig in } U\}.$$

Dann $d \leq n$. Es existiert ein linear unabhängiges System $u_1, \dots, u_d$ in U , und nach Definition von d gilt: Für jedes $u \in U$ ist $u_1, \dots, u_d, u$ linear abhängig. Somit ist $u_1, \dots, u_d$ ein maximal linear unabhängiges System in U , also eine Basis (Charakterisierung von Basen).

Daher $\dim(U) = d \leq n = \dim(V)$. Ist $d = n$, dann nach Korollar 6.3 ist $u_1, \dots, u_d$ auch eine Basis von V , also $U = V$. ■

Beispiel Man zeige, dass $v_1 = (2, -1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-2, 1, 1, 1, 1)$ und $v_3 = (2, -2, 0, 1, -1)$ eine Basis des folgenden Lösungsraums U bilden:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Lösung: Man rechnet leicht nach, dass die drei Vektoren in U liegen. Ferner sind sie linear unabhängig: ist $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$, dann $\lambda = \mu = \nu = 0$ (Komponentenvergleich für die 3., 4. und 5. Komponenten).

Setze $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq U$. Dann ist v_1, v_2, v_3 eine Basis für W , also $\dim(W) = 3$. Wir werden zeigen: es ist $\dim(U) = 3$. Nach Effektivität der Dimension (Satz 6.4) folgt dann $W = U$, und wir sind fertig.

Wegen $W \subseteq U$ ist $\dim(U) \geq \dim(W) = 3$. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^5$ der Lösungsraum der Gleichung $x_1 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$. Dann $U \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^5$. Nun, $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ liegt in $\mathbb{R}^5$ aber nicht in T . Also $T \subsetneq \mathbb{R}^5$. Aus Satz 6.4 folgt $\dim(T) < \dim(\mathbb{R}^5) = 5$, d.h. $\dim(T) \leq 4$. Ferner liegt $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ in T aber nicht in U . Also $\dim(U) < \dim(T)$, woraus folgt $\dim(U) \leq 3$. Also $\dim(U) = 3$, wie erwünscht.

6.3 Die Dimensionsformel für Untervektorräume

Definition Seien U, W Untervektorräume eines Vektorraums V . Die Summe $U + W$ wird als der folgende Untervektorraum von V definiert:

$$U + W := \{v \in V \mid \text{Es gibt } u \in U, w \in W \text{ mit } v = u + w\}.$$

Hilfslemma Der Schnitt $U \cap W$ und die Summe $U + W$ sind tatsächlich Untervektorräume von V . Die Räume U, W sind Untervektorräume der Summe $U + W$.

Beweis. Hausaufgabe Nr. 30. Wegen $u = u + \underline{0}$ und $w = \underline{0} + w$ sind $U, W \subseteq U + W$. ■

Beispiel Ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist eine Gerade durch $\underline{0}$. Ein zweidimensionaler Untervektorraum ist eine Ebene, die $\underline{0}$ enthält. Seien g_1, g_2 zwei solche Geraden, und sei E eine solche Ebene. Dann

$$g_1 + g_2 = \begin{cases} \text{Die durch diese beiden Richtungen} \\ \text{definierte Ebene durch } \underline{0} & \text{falls } g_1 \neq g_2 \\ g_1 & \text{falls } g_1 = g_2 \end{cases}$$

$$g_1 + E = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{falls } g_1 \text{ nicht auf } E \text{ liegt} \\ E & \text{falls } g_1 \text{ auf } E \text{ liegt} \end{cases}$$

Satz: Dimensionsformel für Untervektorräume Seien $U, W \subseteq V$ zwei endlich dimensionale Untervektorräume des k -Vektorraums V . Dann ist

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Beispiel Sind U, V zwei 3-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$, dann ist $\dim(U \cap W) \geq 1$: denn wegen $U + W \subseteq \mathbb{R}^5$ ist $\dim(U + W) \leq 5$, also

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \geq 3 + 3 - 5 = 1.$$

Beweis. Sei $n = \dim(U \cap W)$, und sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $U \cap W$. Nach Satz 6.4 ist $\dim(U) = n + r$ für ein $r \geq 0$. Basisergänzungssatz: es gibt $a_1, \dots, a_r$ derart, dass $b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_r$ eine Basis von U ist. Analog ist $\dim(W) = n + s$ und es gibt $c_1, \dots, c_s \in W$ derart, dass $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_s$ eine Basis von W ist.

Behauptung: $b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_s$ ist eine Basis von $U + W$.

Gilt die Behauptung, dann $\dim(U + W) = n + r + s = (n + r) + (n + s) - n = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$, wie erwünscht.

Erzeugendensystem: Jedes $v \in U + W$ ist eine Summe $v = u + w$ mit $u \in U, w \in W$. Aber u ist eine Linearkombination der b_i und a_j ; und w ist eine Linearkombination der b_i und c_ℓ .

Linear unabhängig: Ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^r \mu_j a_j + \sum_{\ell=1}^s \nu_\ell c_\ell = \underline{0}$, dann

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^r \mu_j a_j = - \sum_{\ell=1}^s \nu_\ell c_\ell. \quad (6.5)$$

Da die linke bzw. rechte Seite in U bzw. in W liegt, liegen beide Seiten in $U \cap W$. Somit gibt es $\rho_1, \dots, \rho_n \in k$ mit

$$\text{Beide Seiten von (6.5)} = \sum_{i=1}^n \rho_i b_i.$$

Betrachten wir die rechte Seite von (6.5), erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \rho_i b_i + \sum_{\ell=1}^s \nu_\ell c_\ell = \underline{0}.$$

Da die b_i und die c_ℓ eine Basis von W bilden, folgt $\rho_i = \nu_\ell = 0$ für alle i, ℓ . Somit ist auch die linke Seite von (6.5) gleich Null. Da die b_i und die a_j eine Basis von U bilden, folgt $\lambda_i = \mu_j = 0$ für alle i, j . Also bilden die b_i, a_j und c_ℓ ein linear unabhängiges System. ■

6.4 Direkte Summe

Lemma 6.6. *Für Untervektorräume U, W eines Vektorraums V sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

a) $U \cap W = \{\underline{0}\}.$

b) *Jedes $v \in U + W$ hat genau eine Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U, w \in W$.*

Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so heißt die Summe $U + W$ eine direkte Summe, und man schreibt $U \oplus W$ statt $U + W$.

Beispiel Die eindimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden durch $\underline{0}$. Die Summe von zwei verschiedenen Geraden durch $\underline{0}$ ist direkt: $g_1 \oplus g_2$ ist die Ebene, die die beiden Geraden enthält.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Ist $w = u + w = u' + w'$, dann gilt $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{\underline{0}\}$. Also $u - u' = w' - w = \underline{0}$, weshalb $u = u'$ und $w = w'$.

b) $\Rightarrow$ a): Ist $v \in U \cap W$, dann sind $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0} = v + (-v)$ zwei Darstellungen $v = u + w$ von $v = \underline{0} \in U + W$. ■

Korollar 6.7. *Bei einer direkten Summe gilt $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$.*

Beweis. Dimensionsformel für Untervektorräume. Es ist $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Die leere Menge stellt eine Basis dar, die Dimension ist also 0. ■

6.5 Komplement

Definition Seien U, W Untervektorräume eines Vektorraums V . Ist die Summe $U + W$ direkt, und gilt ferner $U \oplus W = V$, so heißt W ein *Komplement* von U in V .

Beispiel Sei g eine Gerade durch $\underline{0}$ in $\mathbb{R}^3$, und sei E eine Ebene, die $\underline{0}$ enthält. Liegt g nicht auf E , dann ist $g \cap E = \{\underline{0}\}$, daher ist die Summe $E + g$ direkt. Ferner ist $E \oplus g = \mathbb{R}^3$, daher ist g ein Komplement von E , und auch umgekehrt. Beachten

Sie, dass es viele solche Geraden $g \not\subseteq E$ gibt, daher hat E viele verschiedene Komplemente.

Aus der Schule wissen wir, dass es ein bevorzugtes Komplement gibt: die Gerade durch $\underline{0}$, die senkrecht auf E steht. Aber erst im Kapitel zur Euklidischen Geometrie werden wir uns mit Winkeln beschäftigen – bish dahin gelten alle Komplemente von E als gleichberechtigt.

Beispiel Sowohl $\langle e_2 \rangle$ als auch $\langle (1, 1) \rangle$ ist ein Komplement in $\mathbb{R}^2$ von $\langle e_1 \rangle$.

Satz 6.8 (Existenz eines Komplements). *Sei V ein endlich dimensionaler k -Vektorraum. Dann:*

- a) *Jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ hat mindestens ein Komplement.*
- b) *Für jedes Komplement W von U gilt $\dim(W) = \dim(V) - \dim(U)$.*

Beweis. b): Folgt sofort aus Korollar 6.7.

a): Wir nehmen eine Basis $v_1, \dots, v_r$ von U und setzen sie zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von V fort. Dann setzen wir $W := \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$.

$V = U + W$: Ist $v \in V$, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = a + b$, wobei $a = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in U$ und $b = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i v_i \in W$. Also $v \in U + W$.

Da $\dim(W) = n - r$ ist – da dies die Basislänge ist – folgt $\dim U \cap W = 0$ aus der Dimensionsformel, also $U \cap W = \{\underline{0}\}$, und die Summe ist direkt. ■

7 Lineare Abbildungen

7.1 Lineare Abbildungen

Definition Seien V, W zwei k -Vektorräume. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt *linear*, falls für alle $u, v \in V$ und für alle $\lambda \in k$ gelten

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

Äquivalente Formulierung: für alle $u, v \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in k$ gilt

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Beispiele a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x, y) = (y, x - 3y, 2x + y)$ ist linear. Dies ist injektiv aber nicht surjektiv: $(1, 0, 0)$ liegt nicht im Bild.

b) Sei P_n der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Polynome von Grad $\leq n$. Dann ist die Ableitung $D: P_n \rightarrow P_{n-1}$, $f(x) \mapsto f'(x)$ eine lineare Abbildung. Wegen $1' = 0 = 0'$ ist dies nicht injektiv.

c) Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\Phi_a: C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, die eine stetige Funktion $f(x)$ in $x = a$ auswertet: $\Phi_a(f) := f(a)$. Diese Abbildung Φ_a ist linear.

d) Die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := (1 - y, x)$ ist nicht linear. Etwa, weil $f(0, 0) + f(0, 0) = (1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$, aber $f((0, 0) + (0, 0)) = f(0, 0) = (1, 0)$.

e) Auch die Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ sind nicht linear.

f) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Lösungsraum der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ die Abbildung $f(a, b) = (a, b - a, -b)$. Diese Abbildung f ist linear und bijektiv. Eine bijektive lineare Abbildung nennt man einen *Isomorphismus*.

g) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade durch den Ursprung. Dann ist die senkrechte Projektion eine lineare Abbildung $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow G$.

Lemma 7.1. Sei $f: V \rightarrow W$ eine Abbildung.

a) Die „äquivalente Formulierung“ ist tatsächlich äquivalent zur Definition.

b) Ist f linear, dann $f(0_V) = 0_W$ und $\forall v \in V: f(-v) = -f(v)$.

c) Ist f linear, dann für alle $v_1, \dots, v_n$ in V und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ ist

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

d) Sind $f: V \rightarrow W$ und $g: W \rightarrow U$ linear, dann ist auch $g \circ f: V \rightarrow U$ linear.
Auch die Identitätsabbildung $\text{Id}_V: V \rightarrow V, v \mapsto v$ ist linear.

Beweis. a): Nach der ersten Definition ist $f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$. Nach der Umformulierung ist $f(u + v) = f(1u + 1v) = 1f(u) + 1f(v) = f(u) + f(v)$, und $f(\lambda v) = f(\lambda v + 0v) = \lambda f(v) + 0f(v) = \lambda f(v)$.

b): $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0f(0_V) = 0_W$ und $f(-a) = f((-1)a) = (-1)f(a) = -f(a)$.

c): Induktion über n ; Die Fälle $n = 1, 2$ sind bekannt. (Der Fall $n = 0$ auch!)

d): Es ist $g(f(\lambda u + \mu v)) = g(\lambda f(u) + \mu f(v)) = \lambda g(f(u)) + \mu g(f(v))$. ■

7.2 Matrizen als lineare Abbildungen

Sei $A \in k^{m \times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Fassen wir Elemente $v \in k^n$ als Spaltenvektoren d.h. als $(n \times 1)$ -Matrizen auf, so können wir das Produkt $A \cdot v$ bilden. Das Ergebnis ist eine $(m \times 1)$ -Matrix, d.h. ein als Spaltenvektor aufgefasstes Element von k^m . Somit erhalten wir eine Abbildung $L_A: k^n \rightarrow k^m, v \mapsto A \cdot v$. Diese Abbildung ist linear, da die Matrixmultiplikation distributiv ist.

Ab sofort schreiben wir Elemente von k^n als *Spaltenvektoren*.

Beispiele In diesen Beispielen ist $k = \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in Beispiel f) oben ist L_A für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Für die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 4x_4 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

erfüllt $f = L_A$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$.

c) Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ist $L_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$L_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 2y \\ x \end{pmatrix}.$$

Später werden wir zeigen, dass *jede* lineare Abbildung sich durch eine Matrix darstellen lässt. Allerdings hängt die Matrix von $f: V \rightarrow W$ auch von den gewählten Basen für V, W ab.

7.3 Isomorphismen

Lemma 7.2. *Ist $f: V \rightarrow W$ bijektiv und linear, so ist auch $f^{-1}: W \rightarrow V$ linear. Eine bijektive lineare Abbildung heißt ein (linearer) Isomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung f^{-1} ist auf jeden Fall bijektiv. Seien $c, d \in W$ und $\lambda, \mu \in k$. Sei $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$. Dann $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b) = \lambda c + \mu d$, also $f^{-1}(\lambda c + \mu d) = \lambda a + \mu b = \lambda f^{-1}(c) + \mu f^{-1}(d)$. ■

Bezeichnung Gibt es einen Isomorphismus $f: V \rightarrow W$, so heißen V, W isomorph. Bezeichnung: $V \cong W$. Zusammen mit Lemma 7.1 d) bedeutet Lemma 7.2, dass Isomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Klasse von Vektorräumen ist.

Lemma 7.3. *Isomorphe Vektorräume haben die gleiche Dimension.*

Beweis. Sei $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus und $a_1, \dots, a_n$ eine Basis von V . Für $1 \leq i \leq n$ setze $b_i := f(a_i) \in W$. Behauptung: $b_1, \dots, b_n$ ist eine Basis von W .

Linear unabhängig: Ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0_W$, dann $f: \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mapsto 0_W = f(0_V)$. Wegen Injektivität folgt also $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0_V$. Da die a_i linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i = 0$ für alle i .

Dies zeigt $\dim V \leq \dim W$, falls $f: V \rightarrow W$ injektiv ist. Da unser f sogar bijektiv ist, ist auch $f^{-1}: W \rightarrow V$ injektiv und linear, daher $\dim W \leq \dim V$ auch. ■

Bemerkung Ferner gilt: Ist $f: V \rightarrow W$ surjektiv, so ist $\dim(V) \geq \dim(W)$. Dies ist eine Folgerung der Rangformel. Hierfür benötigt man den Begriff „Kern“.

7.4 Kern und Bild

Definition Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Der Kern von f ist

$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V.$$

Beispiel Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ist L_A die lineare Abbildung $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2z \end{pmatrix}$. Also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Kern}(L_A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -2z \\ y = z \end{matrix}.$$

Also $\text{Kern}(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$, ein eindimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ mit Basis $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lemma 7.4. Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann gelten:

- a) $\text{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von V , und $\text{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von W .
- b) Es gilt: f injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0_V\}$.

Beweis. a): Da $f(0_V) = 0_W$ gelten $0_V \in \text{Kern}(f)$ und $0_W \in \text{Bild}(f)$, somit sind Kern und Bild nicht leer. Liegen v_1, v_2 im Kern, so gilt für $\lambda_1, \lambda_2 \in k$: es ist $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 \cdot 0_W + \lambda_2 \cdot 0_W = 0_W$, weshalb $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ auch im Kern liegt. Liegen w_1, w_2 im Bild, so gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$. Dann gilt

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2,$$

weshalb auch $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ im Bild liegt. Fertig nach Lemma 4.2.

b): Ist f injektiv, so folgt $v = 0_V$ aus $f(v) = 0_W = f(0_V)$. Ist $\text{Kern}(f) = \{0_V\}$ und $f(v_1) = f(v_2)$, dann $f(v_2 - v_1) = 0_W$, weshalb $v_2 - v_1 \in \text{Kern}(f) = \{0_V\}$, d.h. $v_1 = v_2$. ■

7.5 Die Rangformel

Definition Der Rang der linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist $\text{Rang}(f) := \dim \text{Bild}(f)$.

Beispiel (fortgesetzt) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ liegen $L_A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $L_A(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\text{Bild}(L_A)$. Aber diese beiden Vektoren sind linear unabhängig, daher eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Es folgt, dass $\text{Bild}(L_A) = \mathbb{R}^2$ ist, und daher $\text{Rang}(L_A) = 2$.

In diesem Beispiel gilt also

$$\text{Rang}(L_A) + \dim \text{Kern}(L_A) = 2 + 1 = 3 = \dim(\text{Definitionsbereich von } L_A).$$

Das ist kein Zufall.

Satz: Rangformel Seien V und W zwei Vektorräume und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ferner sei V endlich dimensional. Dann gilt

$$\text{Rang}(f) + \dim \text{Kern}(f) = \dim(V).$$

Bemerkung Beachten Sie, dass $\dim(W)$ nicht in der Rangformel vorkommt. Manche Fehler entstehen dadurch, dass man die Rollen von $\dim(V)$ und $\dim(W)$ vertauscht. Man sollte aber doch beachten, dass $\text{Rang}(f) \leq \dim(W)$ gelten muss.

Beweis. Sei $U \subseteq V$ ein Komplement von $\text{Kern}(f)$. Nach Satz 6.8 gilt $\dim(V) = \dim \text{Kern}(f) + \dim(U)$. Wir müssen also zeigen, dass $\dim \text{Bild}(f) = \dim(U)$.

Betrachten wir hierfür die Einschränkung $f|_U$. Ist $f(u) = 0_W$ für $u \in U$, dann $u \in U \cap \text{Kern}(f) = \{0_V\}$, also $u = 0_V$. Somit ist $f|_U$ injektiv. Außerdem ist $f(U) = \text{Bild}(f)$: für jedes $v \in V$ ist $v = v' + u$ für $v' \in \text{Kern}(f)$, $u \in U$, also $f(v) = f(u) \in f(U)$. Somit ist $f|_U: U \rightarrow \text{Bild}(f)$ eine bijektive lineare Abbildung, d.h. ein Isomorphismus. Nach Lemma 7.3 gilt also $\dim(U) = \dim \text{Bild}(f)$. ■

Beispiel Wieder bezeichnen wir mit P_4 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 4 . Sei $\varphi: P_4 \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi(p) := p(1) - p(-1)$. Man bestimme eine Basis von $\text{Kern}(\varphi)$.

Zuerst zeigt man: φ ist linear. Da $\varphi(X) = 2$ ist $\dim \text{Bild}(\varphi) > 0$, also ist φ surjektiv und $\text{Rang}(\varphi) = 1$. Nach der Rangformel also ist $\dim \text{Kern}(\varphi) = 4$. Gesucht sind also vier linear unabhängige Polynome, die in $\text{Kern}(f)$ liegen.

Es ist $1 \in \text{Kern}(f)$. Ist $q \in \text{Kern}(f)$, dann auch p definiert durch $p(X) = q(X) - q(1)$. Somit können wir unsere weitere Suche auf Polynome mit $p(1) = p(-1) = 0$ beschränken. Ein solches Polynom ist $X^2 - 1$. Zwei weitere sind $X(X^2 - 1)$ und $X^2(X^2 - 1)$. Diese vier sind linear unabhängig, also: eine Basis ist $1, X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2$.